Ройтберг Михаил Абрамович
О математических проектах в Красноярской Летней Школе.

Введение

В течение 5 сезонов КЛШ (Красноярской летней школы, 1998-2001, 2003) я организовывал работу со школьниками по так называемым «проектам». В этой работе в качестве преподавателей участвовало около 20 сотрудников. Ряд школьников, работавших по проектам, стали сотрудниками школы. Практически все отчеты школьников сохранены. Этот текст – попытка суммировать накопленный опыт. В основной части объясняется, что понимается под проектом, в чем особенности проектной работы, а также даются методические указания для будущих руководителей проектных курсов и отдельных проектных групп. В приложении 1 приведены все постановки задач за 2003 год, а также избранные темы других лет. (Я буду благодарен за любое указание авторства задач.) К некоторым темам приведены комментарии А.И Сгибнева с попытками указать естественный для школьников ход решения или естественные подсказки консультанта. В приложении 2 приведены два примера отчётов по проекту.

Отметим, что в КЛШ, кроме работы над проектами, школьники изучали и основной математический курс. Формально проекты не были связаны с этим курсом. Однако то, что курс велся теми же преподавателями и в сходном «активном» стиле, видимо, влияло на работу учеников.

Часть 1. Работа над проектами.

§1. Общие сведения.

1.1 Что мы называем проектной работой. Основной цикл.

Проектная работа – это (действующая) модель научно-исследовательской работы ученого. Включение такой работы в учебный процесс преследует несколько целей:

- познакомить школьника с одним из наиболее мощных и традиционных способов познания окружающего мира;
- дать школьнику почувствовать радость от успешно решенной трудной (для него) задачи;
- дать школьнику опыт письменного изложения результатов своей работы, а также устного представления этих результатов – сверстникам и взрослым.

Так как работа над проектом (как и научно-исследовательская работа), как правило, ведется группой, то школьник приобретает еще один ценный опыт – опыт работы в группе.

Не претендуя на полноту, перечислим существенные для нас черты научно-исследовательской работы и моделирующей ее проектной работы:

1) относительная длительность (в условиях КЛШ, как правило, - 10 -15 дней);
2) самостоятельное и свободное «блуждание» в пространстве, заданном условиями задачи;
3) относительная методичность блуждания («метод проб и ошибок»):

- проведение экспериментов, количество и содержание которых, а также форма представления результатов определяются самим исполнителем (в наших проектах эксперименты были численными и проводились вручную либо с помощью несложных компьютерных программ);

- формулировка гипотез на основе результатов проведенных экспериментов, проверка этих гипотез с помощью новых экспериментов и, если нужно, корректировка гипотезы; доказательство гипотезы, согласующейся с экспериментами;

4) уточнение и расширение исходной постановки задачи по ходу работы;
5) необходимость подготовки письменного отчета и устного сообщения.

Отметим, что «блуждание в материале» является неотъемлемой чертой *всякой* творческой (*исследовательской*) деятельности. *Научно*-исследовательская деятельность отличается выработанными веками *специфическими методами* исследования. Предлагаемые школьникам проектные задания (см. ниже п. 1.2) облегчают и делают естественным применение экспериментального подхода к исследуемой проблеме.

Таким образом, основу работы исполнителей над проектом составляет такой цикл (ниже называемый *основным*):

1) проведение численных экспериментов (без использования или с использованием компьютера);
2) анализ полученных экспериментальных данных; выдвижение гипотез, описывающих накопленные данные;
3) проверка предсказательной силы гипотез с помощью новых численных экспериментов, уточнение гипотез;
4) доказательство гипотезы, которая согласуется с экспериментом.

Выполнению описанного основного цикла предшествует понимание постановки задачи. После завершения цикла происходит переход к работе над отчетом - если доказанная гипотеза полностью отвечает на исходный вопрос. Если же доказана промежуточная гипотеза, то происходит уточнение и/или расширение исходной постановки задачи, после чего снова выполняется основной цикл. Таким образом, в ходе работы над проектом основной цикл может быть выполнен не один раз.

Конечно, эта схема не всегда в точности выдерживается. Например, исполнитель проекта (как и работающий ученый) может отложить работу над одной гипотезой и взяться за другую, а потом снова вернуться к исходной гипотезе. Если исполнителей несколько, они могут параллельно работать над несколькими гипотезами, начинать готовить отчет, не дожидаясь проработки всех деталей решения. Некоторые особенности схемы, например, формальное доказательство гипотез, специфичны именно для «зкспериментально-математических» проектов, с которыми мы работали и которые описаны в следующем разделе. Однако, в целом эта схема работает и мы будем использовать ее ниже при описании типичных особенностей и трудностей при выполнении проектов.

Замечание для искушенных читателей. Учащиеся КЛШ, как правило, не имели опыта решения математических задач и, кроме того, были загружены другой деятельностью – как учебной (курс физики, факультативы), так и неучебной. Поэтому по-настоящему трудных математических задач ни разу не предлагалось. Темы выбирались так, чтобы работа в режиме «основного цикла» возникала естественно. Обучение методичной исследовательской работе само по себе рассматривалось мной как, возможно, главный результат работы (школьники, конечно, вряд ли явно осознавали, что они научились какой-то «методике», для них главным было выполнение проекта и рассказ об этом) .

Этим проектная работа, проводившаяся в КЛШ, отдичается от проектной работы, проводимой в примерно аналогичных условиях с «сильными» школьниками, например, в рамках турнира городов. В последнем случае учащиеся уже имеют методический опыт, смысл работы – в решении (в том числе, опираясь на этот опыт) достаточно трудных математическмх задач.

1.2. <u>Экспериментальная математика.</u>

Все проекты, которые мы проводили в КЛШ (и, в частности, все рассмотренные в части 2) можно отнести к т.н. ***проектам по экспериментальной математике*** (термин Г.Б.Шабата). В этих проектах школьник исследует формально описанную абстрактную (математическую или логическую) ситуацию, говоря точнее, - семейство однотипных ситуаций, зависящих от некоторого целочисленного *ведущего* параметра. Ведущим параметром может быть, например, размер игрового поля; степень уравнения; порядковый номер корня уравнения, для которого нужно найти все решения и т.п. В проектах по экспериментальной математике (ЭМ-проектах) есть две важные для нас особенности.

Во-первых (*математичность*), школьник имеет дело с *формально и строго* описанной ситуацией. Поэтому он *самостоятельно* может определить – является ли то, что он придумал решением поставленной задачи, или нет. Это учит школьника научной (и не только) честности и выгодно отличает ЭМ-проекты от т.н. «креативных» заданий («придумать модель города будущего»), которые, как правило, приводят школьника к безответственному и некритичному прожектерству.

Во-вторых (*экспериментальность*), в простейших случаях (при малых значениях ведущего параметра) ситуация может быть исследована простым перебором вариантов – вручную или с помощью несложной компьютерной программы. Такая заложенная в проект возможность проведения численных экспериментов дает школьнику «методику блуждания в поле исследования». Именно возможность экспериментирования отличает работу по ЭМ-проектам от традиционных математических заданий (докажи теорему, реши уравнение) и даже для наиболее слабых, т.е. в наименьшей степени способных к математическим догадкам, учеников, делает ее осмысленной и доступной. Отметим, что эта методика (идти от простого к сложному, выделяя в простых случаях черты, существенные для ситуации в целом) – один из основных принципов научного метода исследования. Другая аналогия – важность исследования критических режимов для понимания сути процесса.

1.3. Групповая работа.

Работу над проектом ведет ***группа учеников***. Каждая рабочая группа *формируется самими учениками*. Группе придается консультант-куратор. Он *назначается* с учетом компетентности в данном проекте и знакомства с группой исполнителей. Пожелания школьников по выбору куратора (если таковые возникнут) естественно учитывать.

Оптимальный количественный состав группы – 2-3 человека. Группы, состоящие из одного человека или более трех человек не запрещаются. Отметим, что группы из 4-х и даже 5-и человек школьники образуют достаточно регулярно. Группы, в которых более 5 человек нежелательны, но я бы избегал прямых запретов, тем более, что в нашей практике такие группы не встречались. При работе над проектом группа, в которой больше 3-х исполнителей, как правило, фактически распадается на две – либо за счет выделения под-проектов в исходном проекте, либо из-за того, что часть группы перестает работать в полную силу. Поэтому такой «большой» группе нужно давать проект, легко допускающий распараллеливание работ, либо просто давать 2 проекта.

Равно-активная работа всех членов группы в течение всего времени работы над проектом – вещь достаточно редкая и куратору не стоит ставить достижение такой (относительной) равномерности в качестве своей цели. Существенно, чтобы каждый участник группы имел свою роль в работе и не испытывал дискомфорта от этой роли. Такой ролью может быть, например, фиксация полученных промежуточных результатов и (дотошное) требование все понятно объяснить. Тем не менее, *независимо от роли в ходе работы над проектом, в итоге каждый из исполнителей должен понимать полученные группой результаты и уметь их объяснить куратору или другим слушателям*.

1.4. Как протекает работа над проектом. Роль кураторов.

Полный срок работы над проектами в КЛШ составлял 10 – 14 дней, что включало 7 – 10 занятий, как правило – по одному занятию в день. Занятие в КЛШ длится 1 час 20 мин с 10-минутным перерывом, впрочем при проектной работе, как правило, общих перерывов не делалось. При этом оформление результатов работы (набивка текстов отчетов, рисование плакатов) часто проводилось и вне рамок учебных занятий.

Это время использовалось примерно так.

Запуск работы (формирование групп, распределение проектов между группами) – 1 занятие.

Освоение проекта, первые эксперименты, первые гипотезы – 1-3 занятий.

Проверка гипотез, их уточнение, новые эксперименты – 1-3 занятия.

Доказательство окончательной гипотезы – 1-2 занятия (возможно, с технической помощью куратора).

Оформление результатов – 2-3 дня (не только во время занятий).

Итоговая сессия – 1-2 занятия.

Большую часть времени школьники работают самостоятельно. Однако роль кураторов при выполнении проектов чрезвычайно важна. Основные ситуации, когда требуется участие куратора, перечислены в разделе **§3**. В каждом конкретном случае участие куратора может свестись к одной фразе (или даже взгляду), а может потребовать длительного разговора, выдачи промежуточных и дополнительных заданий и т.п. - в зависимости от уровня подготовки группы и успешности выполнения проекта. Мы, естественно, не можем дать рекомендации на все случаи жизни, но постараемся привести примеры возможных действий куратора в некоторых (относительно) стандартных ситуациях.

В идеале - группа должна *максимально самостоятельно* выполнить *максимально большую часть задания.* Эти цели, очевидно, противоречат друг другу. Выбрать оптимальный для каждого конкретного случая компромисс - предмет искусства куратора и помогающего ему руководителя проектного курса.

§2. Запуск проектной работы.

2.1. Подготовка проектов.

Для работы необходимо подготовить описания проектов в двух видах - для школьников и для кураторов. В описание проекта для школьников входит только постановка задачи и, возможно, некоторые дополнительные сведения. Примеры таких сведений:

- тип проекта (например, «игра», см. ниже);
- оценка сложности проекта;
- знания (сверх школьной программы), которыми понадобятся исполнителям.

В тексте для куратора полезно описать, например,:

- что необходимо разъяснить школьникам на этапе понимания ими постановки задачи,
- варианты ожидаемых от школьников решений;
- возможные трудности и развилки по ходу работы над проектом,;
- знания, которыми должен владеть куратор.

Примеры описаний проектов даны в части 2.

Типы и уровни сложности, приписанные проектам, облегчают преподавателям работу с архивом проектов. С другой стороны, они могут быть полезны школьникам при выборе проектов «вслепую» (см. ниже). В настоящее время мы предусматриваем следующую типизацию проектов:

- игры;
- логические и текстовые задачи (например, проекты «Башня и два шара», «Мудрецы у людоедов»);
- диофантовы уравнения;
- системы счисления;

Эта типизация, конечно, отражает наш собственный опыт и не претендует на полноту. Отметим, что в проектах важно как их математическое содержание, так и словесная форма их описания. Так, проект «НИМ», отнесенный к классу «игры», требует для своего решения глубокого понимания двоичной системы счисления. Предлагаемая типизация ориентирована, в основном, на форму подачи проекта. Возможно, стоит приписывать проекту два типа - по форме и по содержанию.

Еще более труден вопрос с приписыванием проекту уровня сложности. Этот уровень зависит как от возраста и подготовленности исполнителей, так и от глубины проработки проекта. Например, выработка стратегии игры в «НИМ» для случая 2-х куч камней существенно проще, чем для случая 3-х и более куч. При описании проектов для кураторов в части 2 мы действуем следующим образом. Школьники делятся на 4 возрастные категории (10-й -11-й классы, 8-9-й классы, 5-й - 7-й классы, начальная школа; в КЛШ, естественно, актуальны только две первые категории). Уровень сложности проекта (или его определенной части) соответствует ожидаемому времени решения проекта группой «крепких середняков» данного возраста: A - 1 занятие; B - 2-4 занятия; C - 7-10 занятий, D - более 10 занятий, F - проект давать не следует.

Следует отметить, что методика приписывания проектам типов и уровней сложности еще не была опробована нами на практике. Написанное выше - результат обсуждения опыта работы 2003-го года и последовавшего анализа работы других лет.

2.2. Предварительная подготовка школьников.

Подготовка к групповой работе в КЛШ в 2003-м году проводилась нами в рамках занятий по основному курсу - на этих занятиях ученики тоже работали в группах, за которыми были закреплены кураторы. Так же обстояло дело и в 2000-2001-м годах. Начало работы по проектам происходило после 2-3 занятий основного курса. В конце занятия, предшествующем запуску проектной работы, делалось объявление о грядущей проектной работе (см. ниже). Такой способ подготовки хорош, когда в школе уже существует традиция проектной работы, а школьники и кураторы успели привыкнуть к групповой работе.

В 1998-м и 1999-м году мы проводили специальные «разгоночные» занятия (в 1999-м это были две вторые половинки двух занятий). На разгоночном занятии с учениками (которые работают в группах под руководством кураторов) следует разобрать несколько (два - три - четыре) пробных проектов. Группы просто соответствуют тому, как сидят школьники, состав групп на этом этапе не очень важен. Цель - познакомить школьников с групповой работой, помочь им более осмысленно сформировать группы для основной проектной работы.

Пробный проект должен быть рассчитан на быстрое продвижение. В ходе этого продвижения проект может быть сделан лидерами практически полностью («Полоска», «Числа с заданным числом делителей»). Другой хороший вариант - полностью выполняется упрощенный вариант проекта, а проект в полном объеме затем выбирается заинтересовавшимися как основной проект («НИМ»).

В конце разгоночного занятия или занятия по основному курсу, предшествующего раздаче проектов, ученикам нужно сообщить, что со следующего занятия начнется работа над проектами. Вот что они должны усвоить из этого сообщения:

1) Примерное представлять себе, что такое проект (на основе полученного опыта разгоночного занятия и объяснений преподавателя).
2) Сколько времени (примерно) будет отведено на работу над проектами. Как это время разумно распределить между исследовательской и оформительской частями работы.
3) Проект выполняется группой учеников, оптимальный состав группы - 2-3 человека. Группы, состоящие из одного человека или 4-5 человек не запрещаются.
4) У каждой группы будет консультант-куратор.
5) Школьники должны сами разбиться на группы с учетом пп. 1) и 2). Группы, в которых более 5 человек нежелательны, но я бы избегал прямых запретов (см. ниже).

2.3. <u>Первое занятие. Распределение проектов.</u>

Первое занятие играет большую роль при проектной работе. Группа исполнителей должна выбрать и «присвоить» проект, начать «вживаться» в этот проект и работать над ним, происходит предварительное распределение ролей внутри группы. Поэтому способ формирования групп исполнителей, распределение по группам проектов и кураторов играют большую роль. При этом весьма уместен и плодотворен игровой элемент. За 5 лет проведения проектной работы в КЛШ мы пробовали разные формы проведения 1-го занятия. Приведенное ниже описание, в основном, следует опыту 2003-го года (XXVIII сезон КЛШ).

До начала занятия школьники самостоятельно разбиваются на группы (о численном составе групп см. выше). Для каждой группы должно быть подготовлено *рабочее место* (стол со стульями или просто группа стоящих в кружок стульев). Рабочие места должны быть изолированы друг от друга, подчеркивая независимость групп и давая им возможность работать, не мешая друг другу. Готовя аудиторию к занятию, нужно предусмотреть несколько запасных рабочих мест - чтобы слишком большие группы можно было бы безболезненно разделить на более мелкие.

В начале занятия группы занимают рабочие места по своему выбору. В 2003-м году каждой группе было предложено придумать себе название. Эти названия в дальнейшем никак не использовались преподавателями. Однако сами группы указали эти названия в своих отчетах.

Распределение проектов в 2003-м году происходило в два этапа. На первом этапе школьники владеют лишь неполной информацией о проектах. В 2003-м году это был просто список названий. К названию, в принципе, можно добавить указание типа проекта, уровня сложности, предполагаемого куратора (если они заранее распределены по проектам), что-нибудь еще - например, первые и/или последние слова постановки задачи. Хотя в реальных условиях КЛШ, все видимо ограничится названиями и в будущем. Список названий включал 12 проектов (см. Приложение 1), начальное количество групп школьников - 6. Школьники должны были на этом этапе выбрать 3 проекта.

Затем каждая группа получала полный список всех постановок задач, чтобы выбрать один проект из предварительно отобранных трех. В принципе, не запрещалось выбрать и какой-то из других проектов, но это рассматривалось как ЧП и в реальности не происходило. На этом этапе кураторы могут подключаться к обсуждению, давать советы.

«Тройки предпочтения» различных групп могут пересекаться, окончательный выбор группы проводят независимо друг от друга. Если две группы выбирают один и тот же проект, преимущество имеет та, которая заявила о своем выборе первой. В 2003-м году такое случилось один раз. Руководитель предложил «обездоленной» группе проект по своему выбору («Мудрецы»), группа с предложением согласилась. В 2001-м году две группы независимо друг от друга работали над одним проектом («Али-баба»). Ничего особенно интересного из этого не получилось. Т.е. дублирования следует избегать, но если две группы будут рваться в бой - ОК. Иногда группа (особенно, если в ней

4 и более учеников) не может договориться о выборе проекта. В этом случае нет никакой беды в том, что эта группа разделится. Общая идея: *проект должен в максимальной степени восприниматься школьником, как **его собственный** выбор*.

Из других возможных идей, которые стоит опробовать, укажем следующую. Группа, в которой более 3-х участников, *должна* выбрать два проекта или один «двойной». Пример «двойного» проекта - «Кучи шишек», который состоит в исследовании сходных по описанию игр с совершенно различными стратегиями. Этот проект (по предложению руководителя) взяла в 2003-м году группа из 4-х человек под названием «Питеты» (что бы это значило?). По ходу работы группа естественным путем разделилась на две самостоятельно работавшие подгруппы.

Закрепление кураторов за группами (кроме 2001-го года) проходило без использования игрового элемента - кураторы сами выбирали группы, исходя из знакомства со школьниками и склонности к тем или иным проектам.

В 2001-м году проекты заранее были распределены между кураторами, каждый из которых должен был сам представлять свои проекты. По техническим причинам это не было осуществлено. То, что школьник, выбирая проект, знает кто будет его куратором, имеет свои плюсы и минусы. Возможно к этому опыту стоит вернуться. В 2003-м году сотрудников, полностью закрепленных за курсом, не хватало. Выход был найден в привлечении кураторов-«волонтеров». Группа школьников могла иметь двух кураторов-волонтеров, из которых на каждом занятии (по возможности) был хотя бы один. Если не было ни одного куратора, - ситуацию страховал руководитель курса. Это создавало дополнительные сложности для учеников и преподавателей, но, в целом, сработало.

После того, как группа выбрала проект (и, если нужно, изменила свой состав), и ей выдан куратор, группе вручается *дневник* - тонкая тетрадь (в 12 или 18 листов). В этой тетради записывается состав группы, название проекта и куратор. В дальнейшем группы должны будут записывать в дневник итог каждого занятия - а также все, что они пожелают.

Замечание. Дневник - это голубая мечта, так ни разу и не реализованная. Может быть, куратора в дневник записывать не стоит - на случай его возможной замены? Конец замечания.

В ходе первого занятия (после выдачи дневника) может происходить распад «больших» групп на части. Уже после того, как проект выбран, школьник(и) может(гут) сообразить, что этот проект ему (им) не подходит и пожелать присоединиться к другому проекту. На первом занятии (и даже в начале второго) это нормально. Перекройка групп на более поздних стадиях нежелательна.

Аналогично, на первых занятиях иногда может произойти перераспределение кураторов между группами. Например, несколько кураторов могут взять под опеку несколько групп и по ходу работы уточнить распределение усилий. Важно, чтобы в каждый момент было известно, кто из взрослых за эту группу отвечает. Руководитель курса страхует ситуацию в целом.

2.4. Первое занятие. Начало работы над проектами.

Задача группы на первом занятии - понять постановку задачи и начать работу над проектом (выполнение экспериментов). При этом неявно происходит распределение обязанностей между исполнителями.

Задача куратора при этом - убедиться, что группа правильно поняла постановку задачи и владеет необходимыми знаниями. Если каких-то знаний группе не хватает (например, выбран проект «Симметрические многочлены», а группа не знает, что такое треугольник Паскаля), нужно дать необходимые пояснения. На этой стадии куратор работает в режиме обычного преподавателя - *самостоятельная* работа школьников над проектом начинается только *после* того, как понята постановка задачи.

После того, как эта цель достигнута, группу стоит на какое-то время оставить в покое. В хорошем случае группа начнет делать какие-то эксперименты (например, играть друг с другом в исследуемую игру). В худшем случае группа может «зависнуть», не понимая, чем конкретно им стоит заняться. В любом случае за 10-15 минут до конца занятия (если группа сама не обратится за помощью раньше) стоит подойти к группе и выяснить, что происходит.

Цель куратора - чтобы группа поняла следующее:

- что нужно экспериментировать;
- что экспериментировать нужно систематически, начиная с простейших случаев (наименьших значений ведущего параметра);

- что результаты экспериментов нужно представлять аккуратно и в удобной для просмотра форме.

Желательно, чтобы группа поняла это на первом занятии, но в «тяжелых» случаях это может не удаться. Подробнее о работе куратора на этом этапе - см. ниже п. 1.3.1.

В конце занятия нужно напомнить школьникам о необходимости зафиксировать итоги дня в дневнике и помочь (если нужно) сделать это. Отметим, что до сих пор мы **не использовали** дневников, хотя польза от фиксации текущих результатов очевидна. Школьники с готовностью писали отзывы о занятиях, поэтому можно надеяться, что дневники не вызовут у них отторжения. В тяжелых случаях куратору стоит вести дневник самому. Как обычно, школьники могут отмечать в дневнике не только рабочие моменты, но и все, что им захочется.

§3. Решение задачи.

3.1. <u>Организация работы на занятиях. Роль куратора.</u>

После того, как школьники поняли постановку задачи и получили необходимые дополнительные сведения, они переходят к следующему этапу выполнения проекта - собственно к решению поставленной задачи. За ним последует заключительный этап - подготовка отчета.

На этапе решения задачи школьники самостоятельно, соответственно организованы и занятия. В начале занятия школьники занимают свои рабочие места. Руководитель курса проверяет, на месте ли школьники и кураторы, если нужно, - делает объявления (например, о дисциплине использования компьютеров). Кураторам рекомендуется подойти к своим группам в начале занятия и в конце (минут за 10 до «звонка») - чтобы быть в курсе происходящего и проследить за ведением дневника. Все остальное время куратор (теоретически) предается медитации. На практике все обстоит несколько иначе.

В прошедших сезонах встречались две модели поведения куратора. В первой модели куратор, по возможности, находился на расстоянии от школьников. Во второй - куратор почти все время находится рядом со школьниками и непосредственно наблюдает их работу. Плюсы и минусы обеих моделей понятны и здесь обсуждаться не будут. Я предпочитаю первую модель. Вторая модель больше подходит кураторам, чей возраст не сильно отличается от школьников. При этом важно удерживаться от неоправданного вмешательства в работу школьников.

Когда же такое вмешательство бывает оправданным? Один случай - обсуждавшийся выше процесс понимания постановки задачи. Другие случаи связаны

(а) с трудностями, возникающими у школьников;

(б) с желанием предложить новые вопросы, расширяющие исходную постановку задачи;

(в) с тем, что у школьников возникли интересные «ходы», возможно, не имеющие отношения к решению исходно поставленной задачи.

В следующем п. 3.2 мы подробнее остановимся на борьбе с некоторыми типичными трудностями. Работу куратора в успешных ситуациях (б) и (в) мы подробно обсуждать не будем и ограничимся несколькими замечаниями общего характера.

Замечание 1. Если работа сделана, а время осталось, лучше сначала предложить школьникам самим сформулировать новые вопросы. Затем обсудить эти вопросы, - и сообща сформулировать новую задачу (несколько на выбор). В принципе, модно предложить новый проект никак не связанный с исходным, но на это, обычно, не хватает времени.

Замечание 2. Если есть красивый ход - можно отказаться от исходной темы и переключиться на углубленное исследование неожиданной находки. Кстати, в реальной жизни это тоже бывает. Отработка таких ситуаций всегда требует от куратора импровизации и мастерства и приносит большое удовольствие всем - и школьникам, и преподавателям.

Замечание 3. Часто разумной реакцией на «зависание» школьников является реакция «неспецифическая» - просто подбадривание и тормошение. Ниже это всюду подразумевается, а описываются именно специфические реакции.

<u>3.2. Некоторые типичные трудности: начало выполнения проекта</u>.

От группы ожидается начало экспериментальной работы - проведение пробных экспериментов, выработка плана экспериментальной работы (часто явно не формулируемого), постепенная выработка формы записи результатов. Типичные трудности, возникающие у школьников на этом шаге, -

- зависание, т.е. длительное «обдумывание» задачи без осознанных промежуточных целей; непонимание возможности (полезности) эксперимента;
- бессистемность; непонимание того, что нужно начинать с простейших случаев (игра на длинных полосках);
- неумение выделить ведущий параметр, и, следовательно, понять, что такое «простейшие случаи»;

Что может сделать куратор? Во-первых, диагностировать ситуацию. Ниже приводятся типичные признаки, помогающие при диагностике. Конечно, они не абсолютны и возможны интересные исключения (например, вроде бы зависшие школьники могут находиться в состоянии плодотворного размышления, но не могут или не хотят объяснить это куратору). Дело кураторов эти исключения распознать.

Признаком зависания служит ответ «Думаем» на вопрос «Ну и что вы делаете?». При этом на вопрос «Над чем думаете?» ответа либо не дается, либо следует что-то вроде «Над задачей». В случае зависания стоит предложить что-то вроде; «А давай начнем с простейших случаев» - и раскрыть эту фразу в соответствии со спецификой разбираемого проекта. Например, «Кто победит, если в полоске только 1 клетка?», «Две клетки?» (проект «Полоска»); «Попробуйте подобрать какие-нибудь корни уравнения» (проект «Диофантово уравнение»). Получаемые от школьников ответы нужно фиксировать в удобной и *естественной для школьников* форме - этим задается норма проведения экспериментов.

Школьники (особенно в игровых проектах) часто пытаются начать исследование с достаточно сложных («реальных») случаев. Иногда при этом они схватывают ключевую закономерность или какую-то часть ее, но достаточно часто это заводит в тупик. Определить является ли работа над трудными случаями (минуя простые) действительно плодотворной непросто. Если вы (наблюдая со стороны) решили, что пора вмешаться, можно поступить, например, так. Спросить у школьников «Над чем работаете?». Выяснив, что разбираются довольно трудные случаи, спросить - «А что будет в ситуациях попроще?». Полезно попросить школьников самим описать *самый* простой случай. Это часто вызывает трудности - школьники неосознанно исключают очевидные (но вполне корректные) случаи из анализа. В то же время рассмотрение именно этих случаев бывает плодотворным. Постепенно повышая трудность случаев (в наших проектах это почти всегда означает последовательное увеличение ведущего параметра) нужно дойти со школьниками до уровня, который вызовет у них затруднения. К этому моменту школьники обычно понимают, что значит последовательно увеличивать сложность задачи и подготовлены к дальнейшей самостоятельной работе. В частности, вместе с куратором они выработали адекватную форму записи результатов экспериментов.

Относительно редко бывает, что проблема школьников в том, что они не могут выделить ведущий параметр. Обычно ведущий параметр выделяется естественно и школьников нужно просто «ткнуть» в этот параметр. Такая ситуация, по существу, аналогична рассмотренной в предыдущем абзаце.

Замечание. Бывают проекты, когда ведущий параметр можно выделить несколькими способами (см., например, проект «Башня и шары»). И именно выделение *правильного* ведущего параметра составляет существенную часть догадки - того, ради чего и происходит работа над проектом. Движение же по неправильному параметру значительно затрудняет (делает невозможным) обнаружение. Этот случай рассмотрен ниже.

3.3. <u>Некоторые типичные трудности: выдвижение первой гипотезы.</u>

Школьники плодотворно и относительно долго (около одного занятия) проводили эксперименты. Накоплен (относительно) большой экспериментальный материал и одновременно у школьников накопилась усталость от однотипной работы и ощущение, что новые эксперименты ничего нового не дадут. Настало время перейти к следующему шагу основного цикла - осмыслению результатов основного цикла и выдвижению гипотез. Конечно, осмысление результатов (осознанное и неосознанное) идет все время в течение выполнения экспериментов. Однако, наступает время, когда проведение дальнейших экспериментов без выдвижения какой-то обобщающей гипотезы становится неплодотворным. А гипотез - нет.

Признаком такой ситуации служит утрата интереса школьников к проведению экспериментов. Она происходит неравномерно - сначала выпадает слабое звено; более сильные при этом могут продолжать работать. Здесь (и ниже в аналогичных ситуациях) мы говорим о проблемах *группы как целого.* Трудности, связанные со спецификой групповой будут рассмотрены ниже.

Оговоримся сразу: помощь куратора на этом шаге означает, что полученный школьниками результат не может считаться полученным *совершенно* самостоятельно. Искусство куратора состоит в том, - что и как подсказать. С одной стороны подсказка должна быть минимальной по содержанию и максимально стимулирующей для школьников. С другой стороны, она не должна создавать у школьников иллюзию полностью самостоятельного решения. Можно руководствоваться таким правилом (ср. с «зоной ближайшего развития» Л.С. Выготского):

Подсказывать можно то, что школьники (по крайней мере некоторые) уже и сами поняли, но не могут выразить словами.

Конечно, догадаться, что школьники поняли, а что - нет, - вопрос искусства. Обычно, о правильности догадки можно судить по реакции школьников на подсказку.

Другая идея - предлагать на выбор несколько «естественных» вариантов действий, где наряду с оптимальным будут и неоптимальные и даже тупиковые. Можно сознательно предложить «неправильный» вариант.

Помощь куратора на определенном моменте работы (особенно, если это помощь, в основном, методическая) не отменяет творческой работы школьников. Просто школьники должны уметь отделить то, что они придумали сами (и чем могут по праву гордиться) от того, что им было объяснено. И это умение - еще один побочный (но важный) результат проектной работы.

Часто выходу из тупика мешает плохое представление результатов экспериментов.

- «Посмотри, здесь уже все есть!»
- «Давай нарисуем все это аккуратнее» (предложить формат таблицы или написать его под диктовку ученика)
- Подчеркнуть что-то в готовой таблице

Более тяжелый случай - когда получены не те данные, т.е. вам самому непонятно, как из накопленных данных можно извлечь нужную закономерность. Пример такой ситуации – неверный выбор ведущего параметра (например, в «Башне» ведущий параметр – обратный к тому, который естественно следует из условия). В таких случаях приходится подсказывать – с соблюдением общих правил, приведенных выше.

И, наконец, перейдем к случаю, когда данные представлены хорошо. Что может сделать куратор? Бывает полезно провести в вашем присутствии еще один эксперимент, отслеживая внимательно со школьниками, что происходит. Иногда просто повышенное внимание школьника служит катализатором долгожданной догадки. Иногда таким катализатором может послужить ваши «как бы невзначай» сказанные слова, привлекшие внимание к нужной особенности данных. Бывает полезно указать школьнику на какую-нибудь совершенно очевидную закономерность (и в силу этой очевидности не осознаваемую школьником как закономерность). После этого - спросить, какие еще закономерности видит школьник. Бывает полезно многое. Но что поможет - неизвестно.

<u>3.4. Некоторые типичные трудности: проверка и уточнение гипотез.</u>

После того, как гипотеза сформулирована, школьники должны ее проверить. Типичная трудность на этом шаге - неясное понимание, что мы проверяем *предсказательную силу* гипотезы. Т.е. нужно, используя гипотезу, написать, что мы ожидаем получить в еще не проведенных экспериментах. Потом провести эти эксперименты и выяснить - правы мы или нет. При этом мы можем предсказывать не полный результат, а лишь определенные его свойства. Если школьники этого не понимают - им следует все это объяснить «открытым текстом». По ходу формулировки предсказания школьники часто начинают лучше понимать высказанную гипотезу.

Одна из опасностей - неправильная гипотеза может случайно оказаться подтвержденной. В этом случае я бы просто попросил сделать еще один эксперимент (возможно, указав, какой именно).

Экспериментально подтвержденная гипотеза (сама по себе) - важный результат работы школьника. Его стоит отметить (соблюдая при этом чувство меры и не сбивая школьников с темпа). Это служит стимулом для школьников хорошим стимулом и часто, подтвердив одну гипотезу, они выдвигают новую, начинают ее проверять и т.д. Неподтвержденная гипотеза часто тут же уточняется и исправляется школьниками. Важно, что исправленная гипотеза должна быть проверена *новыми* экспериментами. Этот шаг - проверка и уточнение гипотез - видимо, самый интересный и плодотворный для школьников. Подчеркнем: четко (самостоятельно) сформулированная и проверенная гипотеза рассматривается нами как хороший результат работы.

При этом школьники должны четко понимать разницу между проверенной на нескольких примерах гипотезой и доказанной гипотезой.

3.5. Некоторые типичные трудности: доказательство гипотез.

Трудности:

- Не владеют техникой доказательства.

Действия куратора:

- объяснить (например, метод математической индукции).

3.6. Трудности: групповая работа.

Группа очень редко бывает однородной по способностям участников, их работоспособности и т.п. В какой-то момент кто-то из участников может «выпасть». При этом остальные, «не заметив потери бойца», могут продолжать увлеченно работать. Такую ситуацию полезно отследить - посмотреть внимательнее, что происходит. Может быть, не отвлекая работающих, коротко поговорить с отставшим, спросить - все ли понятно. Часто он просто отвлекся и внимания куратора («неспецифическое ободрение») достаточно, чтобы вернуть его к работе. Или он просто временно отключился от проведения экспериментов и пытается что-то осмыслить. Если действительно что-то непонятно, - можно объяснить, часто достаточно одного-двух слов. Если же действительно один из участников группы отстает, а группа на это не реагирует, то у куратора есть несколько возможных линий поведения. Первая - не предпринимать активных действий, чтобы не замедлять работу группы. При этом можно сказать «Посмотри пока, что они делают, после занятия поговорим», можно сесть рядом и объяснять, что делают другие. Вторая линия - обратить внимание группы на ситуацию и попросить объяснить отставшему то, что ему непонятно.

Какую из этих линий лучше избрать зависит от личных особенностей участников группы - их отношения к своим и чужим успехам и неудачам, умению и желанию объяснять и т.п. И, конечно, куратор имеет право (если это не вредит школьникам) просто выбрать то, что более интересно и приятно ему самому. Отметим, что если один из участников группы не может работать на общем уровне в качестве «генератора идей» и «активного экспериментатора», ему можно предложить полезные для группы роли «критика» или «оформителя результатов».

Часто «выпадение» участника означает, что группе нужно «распараллелиться» и выпавшему участнику нужно на какое-то время поработать самостоятельно и в своем темпе. Группа может сама догадаться об этом, если нет - куратор может дать совет. Вообще, разделение участников на самостоятельно думающие и пробующие подгруппы - типичная и плодотворная ситуация. Обычно вмешательство куратора здесь не требуется - тот, кто что-то придумал, немедленно начинает обсуждать это с коллегами. Я бы советовал кураторам (для себя) отслеживать процесс распараллеливания. Во-первых, это интересно. Во-вторых, позволит избежать возможного (хотя и весьма маловероятного) распада группы.

3.7. Заключение.

Проектные задания объективно труднее задач, обычно предлагаемых на школьных контрольных, и к тому же необычны по форме и содержанию. Тем не менее, «процент успеваемости» при проектной работе, в отличие от обычной школы, близок к 100%. Успех в решении задач и является, видимо, одной из главных составляющих удовольствия, получаемого школьником при проектной работе.

Этот успех, по нашему мнению, имеет две причины. Первая - (относительно) длительная работа школьника над проектом. Вторая - экспериментальная методика работы, названная выше

основным циклом. Овладение этой методикой, включая принцип продвижения от простого к сложному, представляется одним из главных результатов проектной работы для школьника (хотя сами школьники в подавляющем большинстве не осознают это как результат). *Возможность* использования основного цикла заложена в постановках задач, которые предлагались школьникам. Часть школьников, тем не менее, может быть не готова к его использованию. С другой стороны, ключевой момент решения - это догадка, "озарение". Основной цикл, как и другие методики, должны облегчать путь к догадке. Но догадка может и не прийти ни к одному из исполнителей проекта.
Задача кураторов - помочь появиться догадке в минимальной степени стесняя самостоятельность школьников.

§4. Завершение работы над проектом.

4.1. Подготовка отчетов.

К завершению работы над проектом - подготовке отчета и выступления нужно приступать примерно за 3 дня до итогового занятия. Куратор должен вовремя напомнить школьникам о том, что пора закругляться. Подготовка отчета - в принципе, приятная работа (все получилось!). Однако эта работа - непривычна для школьников и все же менее приятна, чем решение. Задача куратора - усадить школьников и помочь им составить план. Дальше школьники сами пишут отчет в соответствии с планом.

Если нужно, куратор может помочь школьникам с набивкой. Помощь в написании отчета должна быть минимальной и сводиться к редактированию. Отчет должен в максимальной степени нести черты индивидуальности исполнителей. При желании куратор может написать свой текст - нечто вроде «Хроника работы над проектом».

Работа над отчетом является одновременно подготовкой к выступлению, но не заменяет ее. Необходимо (а) нарисовать плакаты, (б) потренироваться рассказывать. Куратор должен прослушать предварительно рассказ с проверкой того, что *все* члены группы понимают результат и способны его рассказать. При подготовке плакатов обычно школьники дают простор фантазии, часто не имеющей никакого отношения к научному содержанию проектов. Мешать этому никоим образом не нужно!

4.2. Итоговое занятие.

Итоговое занятие лучше организовать в виде постерной сессии. В КЛШ итоговое занятие было организовано так только в 2003-м году. В остальные годы итоговое занятие проходило в виде фронтальных докладов, которые группы делали поочередно. Опыт четырех лет докладов показал следующее. Каждый докладчик, как правило, оставался доволен своим докладом и мероприятие в этом смысле было успешным и поучительным. Однако уровень внимания аудитории оставался достаточно низким, обычное неумение школьников слушать лекции усугублялось неопытностью докладчиков. От ведущего требовалось немало усилий, чтобы не дать залу «рассыпаться».

При работе в режиме постерной сессии сохраняются достоинства докладов (школьник делает свои доклады достоянием общественности, причем рассказывает в более комфортной обстановке – небольшой группе *заинтересованных* слушателей). Кроме того, рассказ приходится повторять несколько раз, что позволяет (а) всем участникам группы поработать докладчиками и (б) на ходу осознавать ошибки в изложении и исправлять их. Отметим, что кураторы могли бы указывать «своим» на ошибки во время докладов и давать советы, но реально этого не происходило.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Темы проектов, предлагавшиеся школьникам в КЛШ-2003.

1. **Двойная последовательность**

Для какого n можно выписать 2n чисел: {1,1,2,2, … ,n-1, n-1, n, n} в ряд так, чтобы между единичками было расстояние 1, между двойками – 2, между тройками – 3 и т. д.?

Пример правильной расстановки для n = 4: **41134232**.

Пример неправильной расстановки n = 6: **4<u>22</u>645113653** (между двойками расстояние один).

Пытаясь выписать нужную последовательность для n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т.д., нетрудно заметить закономерность: если при делении n на 4 остаток равен 0 или 1, то представление возможно, иначе нет.

2. **Симметрические многочлены.**

Симметрические многочлены – это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются. Например: $\mathbf{x^2+y^2}$, **x+y-xy.**

Степенью симметрического многочлена является наибольшая суммарная степень переменных. Например: $\mathbf{x^2+y^2-xy}$ –многочлен второй степени;

Любой симметрический многочлен можно представить в виде суммы или произведения симметрических многочленов **(xy)** и **(x+y)**. Требуется исследовать свойства таких представлений.

См. пример решения в приложении 2.

3. Контакты

Рассматриваются вилки и розетки, являющиеся правильными n-угольниками (n=1,2,3, …).

1-угольником мы называем точку, а 2-угольником – отрезок.

Контакты расположены по углам многоугольников и пронумерованы, как на вилке, так и на розетке целыми числами от 1 до n.

Воткнуть вилку в розетку – значит как-то совместить соответствующие многоугольники. Вилку можно воткнуть в розетку n разными способами.

При втыкании номера контактов на вилке и розетке могут совпасть, а могут и не совпасть.

Работающими называются такие пара вилка – розетка, что при любом способе втыкания вилки в розетку хотя бы в одном случае номера контактов на вилке и розетке совпадают.

Требуется описать все варианты работающих вилок и розеток.

Удобно зафиксировать розетку и пронумеровать её контакты подряд, скажем, по часовой стрелке, а затем вращать только вилку. Нетрудно заметить, что для нечётных n работающим является вариант, когда вилка и розетка пронумерованы во взаимно обратном порядке. Кроме того, для работающей пары на каждом повороте должен совпасть ровно один контакт, так как если в данном положении совпадёт два, то в каком-то – ни одного.

4. «Ладья – ферзь»

Задача 1. (Ладья) Двое играют в следующую игру: на поле, ограниченном снизу и слева, они двигают ладью по очереди вниз или влево. Выигрывает тот, кто ставит ладью в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

Задача 2. (Ферзь) Двое играют в следующую игру: на поле, ограниченном снизу и слева, они двигают ферзя вниз, влево или по диагонали вниз и влево. Выигрывает тот, кто ставит ферзя в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

См. А. Шень «Игры и стратегии в математике». МЦНМО, 2007.

5. Золотые числа.

Золотые числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$6^2=3\underline{6}$; $5^2=2\underline{5}$; $\mathbf{25^2 = 6\underline{25}}$.

Найти как можно больше золотых чисел; найти способ нахождения всех таких чисел.

Однозначных золотых чисел четыре: 0, 1, 5, 6. Дву- и многозначные золотые числа обязаны кончаться на эти же цифры.

6. Задача о самураях.

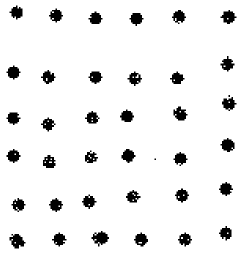
Сидят в кругу самураи и делают себе харакири. Только один останется в живых – последний.

Харакири делает каждый **k-й,** начиная с **k-го**. Требуется найти, каким по счету нужно встать, чтобы оказаться последним делающим харакири и выжить.

<u>О случае k = 2.</u> Стоит составить таблицу номеров уцелевших в зависимости от начального числа самураев. Далее можно увидеть закономерность, которую, впрочем, не так легко доказать напрямик. Можно перенумеровывать самураев после прохождения одного круга, найти рекуррентный закон изменения номера и, используя его как шаг индукции, доказать найденную закономерность. Другой подход – заметить, что если вначале было 2^n самураев, то выживает первый.

7. Исследование квадратно-треугольных чисел.

Квадратные числа – это те числа, которые можно уложить в квадрат точками, так чтобы точки находились друг под другом. Например 36 – квадратное число, т.к. его можно уложить в квадрат точками, так чтобы точки находились друг под другом (см. рис. слева).



Треугольные числа – это те числа, которые можно уложить точками в треугольник так, чтобы точки соседних рядов не лежали друг под другом. Например: 36 – треугольное число (см. рисунок справа). Квадратно-треугольные числа – это пересечение квадратных чисел с треугольными, например: 36 – квадратно-треугольное число т.к. оно является квадратным и треугольным числом.

Требуется описать все квадратно-треугольные числа.

Можно получить рекуррентную формулу, выражающую последующие компоненты через предыдущие, а также явную формулу, содержащую радикалы (см., например, Потапов и др. «Старинные занимательные задачи»).

8. Диофантово уравнение.

Решить уравнение в целых числах: $a^2+b^2+c^2=3abc$.

Ограничимся натуральными числами, так как отрицательные решения легко выражаются через положительные, а нулевое только одно. Среди натуральных будем рассматривать решения с неуменьшающимимся компонентами. Далее, написав два решения с общими двумя компонентами, найдём связь третьих компонент. Тем самым, по имеющемуся решению можно выписать следующее, и т.д.: (1, 1, 1) -> (1, 1, 2) -> (1, 2, 5) -> (1, 5, 14)… Остаётся понять, все ли решения охватываются этой цепочкой.

9. Числовые графы.

Пусть дан набор А различных чисел. Числовой граф, соответствующий А - это граф, который составляется по следующему принципу. Вершины графа соответствуют числам множества А. Две вершины x и y соединяются ребром, только если в графе присутствует вершина z такая что z = x + y.

Разобраться – какие бывают числовые графы.

10. Кучи камней.

Задача 1 («Не больше половины»). Дана кучка камней. Играющие (их двое) по очереди берут камни, причём игрок не может пропускать ход (не брать камни), и может взять не больше половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

См. пример работы в приложении 2.

Задача 2 («Раздели на части»). Играют двое. Имеется несколько куч с произвольным количеством камней в каждой. За один ход игрок разбивает любую кучку на две меньшие – любым способом, но так, чтобы в каждой из новых куч было хотя бы по одному камню. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной стратегии и почему?

Эта задача совсем нетрудная, ответ зависит лишь от чётности суммарного числа камней во всех кучах.

11. Супер-компьютер.

Супер-компьютер умеет выполнять только одну операцию- операцию смешивания двух чисел: из чисел m, n компьютер получает число (m+n) /2. Если m+n – нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на супер-компьютере можно получить единицу?

Нетрудно сообразить, что если у *m* и *n* есть нечётный общий делитель больше 1, то он будет и у всех средних, и единицы получить нам не удастся. Далее можно на примерах убедиться, что в других случаях единица получается, и попробовать это доказать. Есть два подхода: сделать набор чисел минимальным или сделать его максимальным.

При первом подходе будем выкидывать из памяти все числа, кроме нуля и двух наименьших. Любой набор чисел можно свести к нечётному, уменьшая его, поэтому достаточно работать с нечётным. Легко показать, что наибольшее число такого набора всегда можно уменьшить усреднением нечётных чисел и (если надо) сведением числа к нечётному. Тем самым мы можем спуститься к единице всегда, кроме случая, когда два числа совпадут. Остаётся изучить условия совпадения.

При втором подходе, наоборот, рассмотрим сразу *все* числа, которые можно получить усреднением (их конечное количество). Взяв три последовательных числа, нетрудно доказать, что они равноотстоят друг от друга. Тем самым все числа равноотстоят друг от друга, среди них ноль, n и m. Можно найти интервал между числами – это наибольший нечётный делитель n и m.

12. Мудрецы у людоедов.

Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должны сказать какого цвета у него колпак. Тех, кто ответил правильно, - отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?

Нетрудно придумать какой-нибудь способ для спасения половины или двух третей мудрецов. Однако не надо успокаиваться, пока не придуман способ *гарантированно спасти всех, кроме одного!* Способ связан с чётностью количества колпаков одного цвета. Автор комментариев не знает, как естественным образом выводить детей на эту идею.

Избранные темы проектов других лет

13. Поиск чисел с заданным количеством делителей

Для произвольного числа N описать все числа, имеющие ровно N делителей.

Подробнее. Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, - это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? N делителей?

Эффективно решить сначала обратную задачу: сколько делителей имеет число вида: p^n, $p^n q^m$, $p^n q^m r^s$ и т.д. (p, q, r - простые). Для второго случая удобно выписать таблицу делителей, состоящую из n+1 строки и m+1 столбца, а для третьего – представить трёхмерную таблицу. Тем самым угадывается общая закономерность: надо перемножить увеличенные на 1 степени простых множителей. Теперь понятно, что каждое представление числа N в виде натуральных множителей, больших 1, порождает вид числа, имеющего ровно N делителей.

14. Игра НИМ

В игре НИМ играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в НИМ.

См. А. Шень «Игры и стратегии в математике», п. 4. МЦНМО, 2007. Возможный подход к решению такой: рассмотрим сначала одну кучку (очевидно), две кучки (симметричная стратегия). Для трёх кучек поставим такой вопрос: пусть в двух из них количества камней фиксированы – a и b; сколько камней c должно быть в третьей кучке, чтобы позиция была проигрышная? (Заметим, что c определяется по a и b однозначно, т.к. если бы для данных a и b было два разных значения c, то игрок мог бы из большего привести позицию к меньшему, т.е. привёл бы противника к проигрышной позиции.) Рисуем квадрант с натуральными a и b, находим по ним c, заполняем таблицу, смотрим на получающиеся узоры и ищем закономерности.

15. Али-баба.

Есть бочка, дно которой – правильный многоугольник. В углах бочки стоят бутылки горлышком вверх. Али-баба сует руки в бочку и переворачивает две бутылки (он не знает, какие бутылки он перевернул, а может только контролировать расстояния между руками). Далее бочка начинает крутиться. После остановки Али-баба вновь засовывает руки в бочку. Он опять не знает, на какие бутылки он попадет (уже перевернутые или нет). Так продолжается сколько угодно раз. Сколько бутылок он гарантировано сможет перевернуть?

16. Башня и два шара

Есть башня в N этажей и два шара. Шары можно сбрасывать с каждого этажа и они могут разбиться и не разбиться. Нужно определить максимальный этаж, с которого шар может упасть не разбившись, за наименьшее число попыток.

Если бы был только один кокос, то бросать приходилось бы начиная с первого этажа.

Полезно перевернуть задачу: какова этажность дома, который можно «протестировать» данным количеством бросков (имея два кокоса)?

Примеры «разгоночных» проектов

17. Полоска.

Двое играют на полоске из n x 1 клеток бумаги. Каждый закрашивает одну или две идущие подряд клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Найти выигрышную стратегию. Обобщить на полоску n x m, на кубики в пространстве.

Задача доступна даже для начальной школы (в первых шагах). Лучше всего организовать её в виде игры и вначале не требовать словесно объяснить стратегию, а играть. Ученик, догадавшийся, как правильно играть, формулирует стратегию и получает следующий, более сложный вопрос.

18. Диагонали прямоугольников.

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199 x 991 клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуй дать ответ для произвольного размера прямоугольника – размером M x N клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

От данного большого числа стоит перейти к маленьким: начать с прямоугольников 3 на 5, 3 на 6, 6 на 8 клеток. Если стороны взаимно простые, то диагональ проходит только через две угловые вершины. Если же НОД (M, N) = k > 1, то прямоугольник разбивается на k одинаковых прямоугольников со взаимно простыми сторонами. Остаётся аккуратно посчитать концевые точки. Подсчёт пересекаемых клеточек сводится к подсчёту пересекаемых линий и узлов.

<u>Приложение 2.</u>
Примеры отчётов.

Симметрические многочлены

> **СПРАВКА**
>
> **<u>Опр.:</u>** Симметрический многочлен от двух переменных X и Y – это такой многочлен, который не изменяется при замене X на Y и наоборот.
>
> Пример:
>
> $$\mathbf{W (x, y) = x^8 + y^8 + 16\, x^5y^3 + 16\, x^3y^5 + 30\, x^4y^4}$$
>
> **<u>Опр.:</u>** Элементарные симметрические многочлены – это многочлены вида
>
> $$\mathbf{U (x, y) = x + y}$$
> $$\mathbf{V (x, y) = x * y}$$
>
> **<u>Теорема:</u>** Любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные симметрические многочлены U (x, y), V (x, y).

Темой нашего проекта являются симметрические многочлены, а точнее решение конкретной задачи, изложенной ниже, об этих симметрических многочленах.

Условия задачи:

Необходимо выразить сумму n – ых степеней X и Y через элементарные симметрические многочлены U (x, y) и V (x, y)

$$\mathbf{X^n + Y^n}$$
$$\mathbf{X + Y \qquad X * Y}$$

Решение задачи:

Во-первых, мы вывели формулы, до восьмой степени включительно используя квадрат и куб суммы X и Y. Для удобства мы ввели следующие обозначения:

$$u = x + y$$
$$v = x * y$$
$$Pn (u, v)$$

$P_1 = u$

$P_2 = u^2 – 2v$

$P_3 = u^3 – 3uv$

$P_4 = u^4 – 4u^2v + 2v^2$

$P_5 = u^5 – 5u^3v + 5uv^2$

$P_6 = u^6 – 6u^4v + 9u^2v^2 – 2v^3$
$P_7 = u^7 – 7u^5v + 14u^3v^2 – 7uv^3$
$P_8 = u^8 – 8u^6v + 20u^4v^2 – 16u^2v^3 + 2uv^4$

Рассмотрев данные формулы, мы обнаружили следующие периодические зависимости:

1. Степень **n** первого одночлена **u** совпадает с номером многочлена $\mathbf{P_n}$
2. Степень **n** второго одночлена **u** (и последующих) выражается через $\mathbf{u^{n-2}}$ (уменьшается на двойку)
3. Степень одночлена **v** возрастает на единицу по горизонтали
4. Коэффициент при втором одночлене совпадает с номером многочлена $\mathbf{P_n}$
5. Через два шага (два многочлена) появляется новая зависимость
6. Также присутствует чередование знаков при коэффициентах многочлена

Во-вторых, вывели общую формулу для решения данной задачи. Ниже представлено пошаговое выведение этой формулы:

1. $(x + y)^n = x^n + C_n^1 * x^{n-1} * y + C_n^2 * x^{n-2} * y^2 + ... + C_n^k * x^{n-k} * y^k + ... + C_n^{n-2} * * x^2 * y^{n-2} + C_n^{n-1} * x * y^{n-1} + y^n = x^n + y^n + C_n^1 * x * y * (x^{n-2} + y^{n-2}) + C_n^2 * x^2 * y^2 * (x^{n-4} + y^{n-4}) +...$
2. Учитывая данные треугольника Паскаля, мы сделали следующее заключение: что для решения нашей задачи существует два вида формул, одна из которых соответствует четной степени симметрического многочлена, а другая нечетной.

Четная

$$P_n (u, v) = u^n – [C_n^1 * v * P_{n-2} (u, v) + C_n^2 * v^2 * P_{n-4} (u, v) + ... + C_n^{(n/2)-1} * v^{(n/2)-1} * u + C_n^{n/2} * v^{n/2}]$$

Нечетная

$$P_n (u, v) = u^n – [C_n^1 * v * P_{n-2} (u, v) + C_n^2 * v^2 * P_{n-4} (u, v) + ... + C_n^{(n-1)/2} * v^{(n-1)/2} * P_1 (u, v)]$$

Вывод: Для решения этой задачи достаточно было, учитывая данные треугольника Паскаля и вышеупомянутой периодической зависимости, вывести две общие формулы для четной и нечетной степени симметрического многочлена.

Работу выполнили:
Переломова Юлия
Мальцева Екатерина
Захарова Надежда
Под руководством:
М.А. Ройтберга
Королева Петра
Карлова Ивана
Борисюка Антона

Кучи камней («не больше половины»)

Теорема 1.

1. Единица – первое проигрышное число (проигрышное число – это число, при котором ходящий проигрывает).

2. Пусть X – проигрышное число, тогда:
   А. Числа, большие X и меньшие 2X+1 – выигрышные;

Б. 2X +1 – проигрышное число.

Доказательство

1. Единица – первое проигрышное число, т.к. в этом случае нельзя сделать ход.

2.А. Пусть X- проигрышное число, N – число, причем

$$X < N < 2X+1$$

Очевидно,

$$N-X \leq N/2$$

Поэтому можно отнять N-X камней и получить проигрышное число X.

Б. Докажем, что 2X+1 – проигрышное число.

Докажем от противного: Пусть 2X+1 – выигрышное число. Тогда ходящий игрок (назовем его Первым) может за один ход оставить в кучке проигрышное число камней. По условию задачи он не может не может брать больше половины, т.е. больше X камней. Значит, после хода Первого игрока останется Y камней, где

$$X+1 \leq Y \leq 2X$$

По доказанному, все такие числа – выигрышные. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 2.

А. Все числа вида $X_n = 2^n-1$, где n – любое натуральное число, – проигрышные.

Б. $X_n=2^n-1$ – единственные проигрышные числа.

Доказательство

А. Доказательство проводится методом математической индукции.

$X_1 = 2-1 = 1$ – проигрышное число. Пусть X_n – проигрышное число.

По теореме 1, если X –проигрышное число, то и 2X+1 –проигрышное число.

следовательно $X_{n+1} = 2X_n+1 = 2(2^n-1)+1= 2*2^n-1= 2^{n+1}-1$ - проигрышное число.

Б. Пусть Y не число вида 2^n-1. Тогда для некоторого числа n выполнено:

$$2^n - 1 < Y < 2^{n+1} - 1$$

Очевидно, $Y - 2^n \leq Y/2$, значит, из Y можно получить проигрышное число камней $2^n - 1$. Т.е. Y – выигрышное число.

Теорема доказана.

№ Проигр.Числа	Число	Формула
1	1	$2^1-1=1$
2	3	$2^2-1=3$
3	7	$2^3-1=7$

Дедов Дмитрий
Прохоров Владимир
Орлова Мария
Хорец Александра